Домашно №1 по Дискретни Структури на специалност Компютърни науки, 2 поток, зимен семестър 2020/2021г.

Камен Димитров Младенов, Група 6

15 Ноември 2021

Задача 1. **Решение:** Нека от всеки каубой да начертаем права линия до най-близкия друг каубой, които линии да означим с $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$ където $d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_n$.

I. случай: Всичките линии са свързани последователно в една дълга кривяща се линия. Нека да означим каубоите в краищата на d_n с c_{2021} и c_{2020}. Каубой c_{2021} няма да бъде застрелян, понеже най-близкия му каубой ще е c_{2020}, обаче за c_{2020} най-близкия каубой ще е на другия край на d_{n-1}.

II. случай: Всички линии са отделени, тоест имаме само двойки застреляли се каубои. Понеже 2021 е нечетна цифра, то ние ще имаме един каубой който не може да участва в двойка застреляни. Тоест, точно този каубой няма да бъде застрелян.

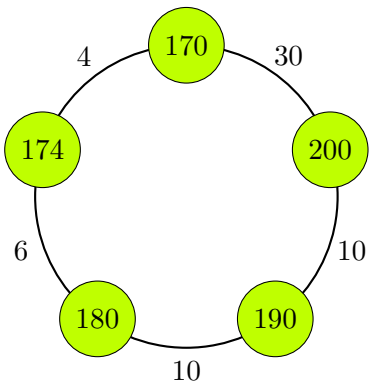
III. случай: Някои линиии са свързани в кривящи се линии, други са отделени. Всяка кривяща се линия може да се сведе до I. случай, следователно има поне един незастрелян каубой.

Задача 2. **Решение:** Нека да наредим $h1, h2, h3, ..., h_n$ в редица с нарастващ ред на височина, тоест $h1$ $h2$ $h3$ ... h_n. Тогава, за всеки двама съседни човека, дискомфортът ще бъде възможно най-малкък и следователно общият дискомфорт също ще е най-малък.

Общият дискомфорт в тази ситуация ще бъде $|h_1 - h_2| + |h_2 - h_3| + ... + |h_{n-1} - h_n|$. Понеже височините на хората са в нарастващ ред, то това е еквивалентно на $(h_2 - h_1) + (h_3 - h_2) + ... + (h_n - h_{n-1}) = \cancel{h_2} - h_1 + \cancel{h_3} - \cancel{h_2} + ... + h_n - \cancel{h_{n-1}} = h_n - h_1$.

Обаче, ние искаме да ги наредим в кръг, което означава че към общия дискомфорт на нареждането в редица трябва да добавим и дискомфортът между първия и последния. Тоест, $h_n - h_1 + |h_1 - h_n|$. От $h_n > h_1$, следва че това е еквивалентно на $h_n - h_1 + h_n - h_1 = 2\,(h_n - h_1)$.

Пример за минимален общо дискомфорт е нареждане по височина на петима човека с височини $170, 174, 180, 190, 200$. Минималния общ дискомфорт при формулата е $2 \cdot (200 - 170) = 2 \cdot 30 = 60$, равен с този от фигурата: $4 + 6 + 10 + 10 + 30 = 60$.



Задача 3. **Решение:**

а) Нека $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^{>0}$ и $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N}^{>0} \times \mathbb{N}^{>0}$

I. Разглеждаме за рефлективност

$$(a,b)R(a,b) \iff ab = ba \quad \text{вярно от комутативност на умножението на } \mathbb{N}^{>0}$$

II. Разглеждаме за симетричност

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc \qquad (c,d)R(a,b) \iff cb = da$$
$$bc = cb \text{ вярно от комутативност на умножението на } \mathbb{N}^{>0} \implies ad = da$$

III. Разглеждаме за транзитивност

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc \implies \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \qquad (c,d)R(e,f) \iff cf = de \implies \frac{f}{e} = \frac{d}{c}$$
$$\implies \frac{f}{e} = \frac{b}{a} \quad af = be \iff (a,b)R(e,f)$$

От I., II. и III. следва че R е релация на еквивалентност

б)

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Следователно, всеки клас на еквивалентност е от вида $\left\{(a,b) \mid \frac{a}{b} = r\right\}$ за $r \in \mathbb{Q}^{>0}$.
Множеството от всички класове на еквивалентност е изброимо безкрайно. Всеки клас на еквивалентност е изброим $\left(\left\{(a,b) \mid \frac{a}{b} = r\right\} \subset \mathbb{N}^2\right)$ и можем да го изброим чрез всички на кратни на прости числа (които вече не са използвани). Тоест, за първия клас на еквивалентност можем да използваме всяко второ число, за втория клас - всяко трето число (като пропускаме тези, които са кратни и на 2) и така нататък.

Задача 4. Решение:

а) Щом S е крайно, значи съществува

произволно w за което $f(w) = x$,
произволно z за което $f(z) = w \quad (\ f(f(z)) = x\ )$,
произволно s за което $f(s) = z \quad (\ f(f(f(s))) = x\ )$
и така нататък. След краен брой подобни образувания,
ще стигнем до произволно $f(y) = t \quad (\ f(f(\ldots(f(y))\ldots)) = x\ )$

Имайки предвид индуктивната дефиниция, следва че имаме $f^n(y) = x$ за някакво $n > 1$. Обаче, по дефиниция, обратната функцкяи $f^{-1}(y) = x$.
Тоест, $f^n(y) = f^{-1}(y)$ за някакво $n > 1$.

б) Ако $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дивергира към безкрайност $\left(\text{примерно } g(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}\right)$ то нужният брой образувания докато стигнем до $f(f(\ldots(f(y))\ldots)) = x$ ще бъде безкрайно голям. Тоест, нашият n в $f^n(y) = x$ ще бъде безкрайно голям и няма да съществува.